16/11/2016

<u>Παράδειγμα</u>

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 , & x \in \mathbb{Q} \\ 0 , & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Θα δ.ο. η f δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της $x_0 \in \mathbb{R}$.

1η περίπτωση $x_0 \in \mathbb{Q}$ $f(x_0) = 1$

Για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ για τυχόν $\delta > 0$ επιλέγουμε $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ με $|x - x_0| < \delta$ (υπάρχει τέτοιο x λόγω της πυκνότητας των αρρήτων)

$|f(x) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2}$ Άρα η f δεν είναι συνεχής στο x_0

2η περίπτωση $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ $f(x_0) = 0$

Για $\varepsilon = \frac{1}{2}$ για τυχόν $\delta > 0$ επιλέγουμε $x \in \mathbb{Q}$ με $|x - x_0| < \delta$ και έχουμε
$|f(x) - f(x_0)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2}$ Άρα η f δεν είναι συνεχής στο x_0

<u>Θεώρημα</u> Χαρακτηρισμός της συνέχειας με χρήση ακολουθιών - Αρχή της μεταφοράς.

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A_0$

ΠΑ.Ε.Ι. (i) Η f είναι συνεχής στο x_0

(ii) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A, αν $x_n \to x_0$ τότε $f(x_n) \to f(x_0)$

Απόδειξη

(i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στο A για την οποία ισχύει $x_n \to x_0$

Θα αποδείξουμε ότι $f(x_n) \to f(x_0)$

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η f είναι συνεχής στο x_0 $\exists\, \delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (1)

Αφού $x_n \to x_0$, θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $|x_n - x_0| < \delta$

και άρα από την (1) $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$

Επομένως $f(x_n) \to f(x_0)$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Υποθέτουμε (προς απαγωγή στο άτοπο) ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0

Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $|x - x_0| < \delta$ και $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ (2)

Εφαρμόζοντας την (2) για $\delta = \frac{1}{n}$ $n = 1, 2, \ldots$

προκύπτει ότι υπάρχει $x_n \in A$ ώστε

$|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ και $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

Έτσι κατασκευάσαμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο A ώστε $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ και $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Άρα $x_n \to x_0$ και $f(x_n) \not\to f(x_0)$ άτοπο

Τα παραπάνω Θεώρημα (αρχή της μεταφοράς) χρησιμοποιείται με δυο τρόπους

(α) Για να δ.ο. η f είναι συνεχής στο x_0 δείχνουμε ότι
$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$

(β) Για να δ.ο. η f δεν είναι συνεχής στο x_0 βρίσκω μια ακολουθ. (x_n) στο A με $x_n \to x_0$ και $f(x_n) \not\to f(x_0)$

Παρατήρηση

Αν $f: A \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ και (x_n), (y_n) δυο ακολουθίες στο A με $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$
$f(x_n) \to l_1$ $f(y_n) \to l_2$

με $l_1 \neq l_2$ τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0

Παράδειγμα

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$

Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι συνεχής σε κανένα $x_0 \in \mathbb{R}$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$
Τότε υπάρχει ακολουθία ρητών (x_n) με $x_n \to x_0$
και ακολουθία αρρήτων (y_n) με $y_n \to x_0$
Τότε $f(x_n) = 1 \to 1$
$f(y_n) = 0 \to 0$
Άρα η f δεν είναι συνεχής στο x_0

Θεώρημα Έστω f, g $A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ ώστε f, g συνεχής στο x_0

Τότε

(i) Η $f+g$ είναι συνεχής στο x_0

(ii) Η fg είναι συνεχής στο x_0

(iii) Αν $g(x_0) \neq 0$ η $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0

Απόδειξη

i) **1ος τρόπο** με τον ορισμό

Έστω $\varepsilon > 0$

Εφόσον η f είναι συνεχής στο x_0 υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta_1$ ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Εφόσον η g είναι συνεχής στο x_0 υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta_2$ να ισχύει $|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$

Εφόσον $|x - x_0| < \delta \leq \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$|x - x_0| < \delta \leq \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon/2$

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| = |(f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))| <$$

$$< |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Επομένως η $f+g$ είναι συνεχής στο x_0

2ος τροπος (με αρχη της μεταφορας)
Εστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθια στο A με $x_n \to x_0$
Εφοσον η f ειναι συνεχης στο x_0 προκυπτει
$f(x_n) \to f(x_0)$

Εφοσον η g ειναι συνεχης στο x_0 προκυπτει
$g(x_n) \to g(x_0)$

Αρα $f(x_n)+g(x_n) \to f(x_0)+g(x_0)$ δηλαδη
$(f+g)(x_n) \to (f+g)(x_0)$

Επομενως η $f+g$ ειναι συνεχης στο x_0

(ii), (iii)
Εστω (x_n) ακολ. στο A με $x_n \to x_0$
Εφοσον f συνεχης στο x_0 $f(x_n) \to f(x_0)$
» g » » » $g(x_n) \to g(x_0)$

Αρα $f(x_n)g(x_n) \to f(x_0)g(x_0)$ και $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$
Επομενως η $f\cdot g$ και $\dfrac{f}{g}$ ειναι συνεχεις στο x_0

Θεωρημα Εστω $f: A \to \mathbb{R}$ μια συναρτηση και
$g\ B \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ωστε $f(A) \subseteq B$
Αν η f ειναι συνεχης στο x_0
και η g ειναι συνεχης στο $f(x_0)$
Τοτε η $g\circ f$ ειναι συνεχης στο x_0

Αποδειξη
1ος τροπος (με αρχη μεταφοράς)
Εστω (x_n) μια ακολουθια στο A με $x_n \to x_0$
Εφοσον η f συνεχης στο x_0

Προκύπτει ότι $f(x_n) \to f(x_0)$
Εφόσον η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ προκύπτει ότι

$g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$
δηλ.
$(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$
Επομένως η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0

<u>2ος τρόπος</u> (με τον ορισμό)

Έστω $\varepsilon > 0$
Εφόσον η g είναι συνεχής στο σημείο $f(x_0)$ υπάρχει $\zeta > 0$ ώστε για κάθε $y \in B$ με $|y - f(x_0)| < \zeta$ να ισχύει $|g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ (1)

Εφόσον η f είναι συνεχής στο x_0 υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει
$|f(x) - f(x_0)| < \zeta$ και άρα από την (1)
$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$

Άρα η $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0

Παρασκευή 25/11
11-2 Αίθουσα 2

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέμε ότι ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz αν $\exists$ $c > 0$ ώστε
$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ $\forall x, y \in A$

<u>Παρατήρηση</u> Αν η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz (με σταθερή c) τότε είναι συνεχής

Αποδ.
$\varepsilon > 0$ Θέτουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$ κ.τ.λ.

<u>Εφαρμογή</u>

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sin x$
$\forall x, y \in \mathbb{R}$
$|f(x) - f(y)| = |\sin x - \sin y| = \left|2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|$

$= 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|$

$\leq 2 \cdot \left|\frac{x-y}{2}\right| \cdot 1$ Χρησιμοποιούμε ότι
$= |x-y|$ $|\sin u| \leq |u|$ $\forall u$

Η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz (με σταθερά 1) άρα είναι συνεχής

(ii) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Άρα ~~gof~~ $g = f \circ h$ όπου $h(x) = \frac{\pi}{2} - x$
$f(x) = \sin x$ συνεχής ως σύνθεση δύο συνεχών

(iii) $\tan: A \to \mathbb{R}$
$A = \mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2}\ k \in \mathbb{Z}\}$

$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ συνεχής ως πηλίκο συνεχών

Παρατήρηση.

Απο το πρώτο Θεώρημα και εφόσον η $f(x)=x$ είναι συνεχής προκύπτει ότι οι x, x^2, x^3, x^4 είναι συνεχείς και ότι όλα τα πολυώνυμα

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ είναι συνεχείς

Επίσης όλες οι ρητές συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

Επίσης για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση $f\,[0,+\infty) \to \mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt[k]{x}$ είναι συνεχής.

(Προκύπτει με χρήση της αρχής της μεταφοράς)

Προκύπτει ότι για κάθε $a>0$ η συνάρτηση
$g\,[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $g(x) = x^a$ είναι συνεχής
(παραλείπεται η αποδ.)

Παράδειγμα

Εστω $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση (δηλαδή ακολουθία)

Θ.δ.ο η f είναι συνεχής
Εστω $n_0 \in \mathbb{N}$ Θα δ.ο η f είναι συνεχής στο n_0

Εστω $\varepsilon > 0$ Θετουμε $\delta = 1$
Για κάθε $x \in \mathbb{N}$ με $|x - n_0| < 1$
δηλ. $n_0 - 1 < x < n_0 + 1$ αναγκαστικά $x = n_0$
Αρα $|f(x) - f(n_0)| = |f(n_0) - f(n_0)| = 0 < \varepsilon$ Αρα f συνεχής

Εστω $a>0$

Θ.δ.ο η συνάρτηση

$f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f_a(x)=a^x$ είναι συνεχής

Αν $a=1$ η f_a είναι η σταθερή συνάρτηση με τιμή 1 η οποία είναι συνεχής

Αν $a>1$ παρατηρούμε ότι η f_a είναι (γνησίως) αύξουσα
Δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι συνεχής στο 0. Από τα γνωστά για τις ακολουθίες $\sqrt[n]{a}\to 1$ άρα και

$\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\to 1$

Εστω $\varepsilon>0$

$\exists n_1\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall n\geq n_1 \quad |\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$

εφόσον $\sqrt[n]{a}\to 1$ $\quad$ δηλ. $1-\varepsilon<\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon \quad (1)$

Εφόσον $\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\to 1$ $\quad \exists n_2\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall n\geq n_2 \quad \left|\frac{1}{\sqrt[n]{a}}-1\right|<\varepsilon$

δηλ. $1-\varepsilon<\frac{1}{\sqrt[n]{a}}<1+\varepsilon \quad (2)$

Θέτουμε $n_0=\max\{n_1,n_2\}$ και $\delta=\frac{1}{n_0}$

Τότε $\forall x\in\mathbb{R}$ με $|x|<\delta$

$$1-\varepsilon \underset{(2)}{<} a^{-\frac{1}{n_2}} \underset{(2)}{<} a^x < a^{\frac{1}{n_1}} \underset{(1)}{<} 1+\varepsilon \Rightarrow |\underbrace{a^x}_{f_a(x)}-\underbrace{1}_{f_a(0)}|<\varepsilon$$

Άρα η f_a είναι συνεχής στο 0

Εστω τώρα τυχόν $x_0\in\mathbb{R}$ και τυχούσα ακολουθία (x_n) στο $\mathbb{R}$ με $x_n\to x_0$

Τότε $x_n - x_0 \to 0$

Εφόσον (όπως αποδείξαμε) η f_a είναι συνεχής στο 0

$$a^{x_n - x_0} \to a^0 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a^{x_n}}{a^{x_0}} \to 1 \Rightarrow a^{x_n} \to a^{x_0}$$
$$\Rightarrow f_a(x_n) \to f_a(x_0)$$

→ Αν $0 < a < 1$

$$f_a(x) = a^x = \frac{1}{\frac{1}{a^x}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = \frac{1}{f_{1/a}(x)}$$

Εφόσον $\frac{1}{a} > 1$
η $f_{1/a}$ είναι συνεχής
άρα f_a συνεχής

Εκφώνηση - Παράδειγμα

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n} & x = \frac{m}{n} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \quad m \in \mathbb{Z} \quad \text{ΜΚΔ}(n, m) = 1$$